

Un schéma simplicial de Grothendieck-Pridham

Brahim Benzeghli*

21 mars 2013

Résumé : Dans [PRID], Pridham a montré que tout n -champs d'Artin \mathcal{M} admet une présentation en tant que schéma simplicial $X \rightarrow \mathcal{M}$, telle que le schéma simplicial X satisfait à certaines propriétés notées par $G.P_{n,k}$ de [GROTH]. Dans la présentation $(\cdots \rightrightarrows X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \rightarrow \mathcal{M})$. Le schéma X_1 représente une carte pour $X_0 \times_{\mathcal{M}} X_0$. Donc, la lissité de $X_0 \rightarrow \mathcal{M}$ est équivalent à la lissité des deux projections $\partial_0, \partial_1 : X_1 \rightarrow X_0$. Ces sont les deux premières parties de la condition de Grothendieck-Pridham, notées $G.P_{1,0}$ et $G.P_{1,1}$. Dans [BENZ12] nous avons introduite un n -champ d'Artin \mathcal{M} des éléments de Maurer-Cartan d'une dg-catégorie. On a construit une carte, et on a déjà fait la preuve des premières conditions de lissité explicitement. Pour tout n et tout $0 \leq k \leq n$ Pridham considère un schéma noté $Match_{\Lambda_n^k}(X)$ avec un morphisme $X_n \rightarrow Match_{\Lambda_n^k}(X)$. On construira explicitement le schéma simplicial de Grothendieck-Pridham X , on montrera la lissité formelle de cette carte précédente, ainsi que \mathcal{M} est un n -champ géométrique.

Abstract : In [PRID], Pridham has shown that any Artin n -stack \mathcal{M} has a presentation as a simplicial scheme $X \rightarrow \mathcal{M}$ such that the simplicial scheme X satisfies certain properties denoted $G.P_{n,k}$ of [GROTH]. In the presentation $(\cdots \rightrightarrows X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0 \rightarrow \mathcal{M})$, the scheme X_1 represents a chart for $X_0 \times_{\mathcal{M}} X_0$. Thus, the smoothness of $X_0 \rightarrow \mathcal{M}$ is equivalent to the smoothness of the two projections $\partial_0, \partial_1 : X_1 \rightarrow X_0$. These are the first two parts of the Grothendieck-Pridham condition, denoted $G.P_{1,0}$ and $G.P_{1,1}$. In [BENZ12] we introduced an Artin n -stack \mathcal{M} of Maurer-Cartan elements of a dg-category. We constructed a chart, and have already proven the first smoothness conditions explicitly. For any n and any $0 \leq k \leq n$ Pridham considers a scheme denoted $Match_{\Lambda_n^k}(X)$ with a morphism $X_n \rightarrow Match_{\Lambda_n^k}(X)$. We will construct explicitly the Grothendieck-Pridham simplicial scheme and show the smoothness of the preceding map, therefore \mathcal{M} is a geometric n -stack.

Introduction

Dans [BENZ08] on a construit une carte explicite $V \rightarrow Perf$ pour l' ∞ -champs des complexes parfaits, où V était le schéma de Buchsbaum-Eisenbud [BUCH1], [BUCH2], [BRUN], [HUNE], [KEMP], [MASS], [TRIV] et [YOSH] qui paramétrise les différentiels d

*Ce papier a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-09-BLAN-0151-02 (HODAG)

avec $d^2 = 0$ sur une suite de fibrés vectoriels triviaux. Le but principal du [BENZ08] était de montrer la lissité formelle du morphisme $V \rightarrow Perf$, après avoir explicité l' ∞ -champs d'Artin $Perf$.

Dans [BENZ12] on a généralisé ce résultat pour un autre champs. Nous utiliserons ici les mêmes notations que dans [BENZ12]. On fixera une dg-catégorie k -linéaire \mathcal{P} qui satisfait aux hypothèses suivants :

- L'ensemble des objets $Ob(\mathcal{P})$ est fini.
- Pour tout $E, F \in Ob(\mathcal{P})$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}^i(E, F)$ est un k -espace vectoriel de dimension fini.
- Il existe un indice $n > 0$ tel que pour tout $i < -n$, le k -espace vectoriel $\mathcal{P}^i(E, F) = 0$.

On peut définir une $(\infty, 1)$ -catégorie $MC(\mathcal{P})$ dont les objets sont les couples (E, η) où E est un objet de \mathcal{P} et η est un élément de Maurer-Cartan dans $\mathcal{P}^1(E, E)$.

On a défini l' ∞ -champs $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ comme le ∞ -champs associé à l' ∞ -préchamps $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}^{es}$ qui à une k -algèbre B associe l'intérieur de $MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$.

Pour la carte, nous avons construit un foncteur

$$V_E : AlgCom_k \rightarrow \mathcal{E}ns$$

représentable par un schéma affine qui associe à chaque $B \in AlgCom_k$ son image $V_E(B)$ l'ensemble des éléments de Maurer-Cartan dans $\mathcal{P}^1(E, E) \otimes_k B$.

Dans [BENZ12] nous avons démontré que le morphisme $V_E \rightarrow \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est formellement lisse, ce qui fournit une carte. L'existence d'une carte nous a permis de déduire que $\mathcal{MC}_{\mathcal{P}}$ est un $(n + 1)$ -champ d'Artin.

Cependant, la structure supérieure n'est pas explicite dans la carte.

Dans [PRID] , Pridham a montré que tout n -champs d'Artin \mathcal{M} admet une présentation en tant que schéma simplicial

$$X. \rightarrow \mathcal{M}$$

telle que le schéma simplicial $X.$ satisfait à certaines propriétés de lissité qui seront rappelées ci-dessous. Ces propriétés ont été énoncés pour la première fois par Grothendieck dans [GROTH] donc nous appelons cela la *condition de Grothendieck-Pridham* notée $G.P$.

Considérons le début de la présentation

$$X_1 \rightrightarrows X_0 \rightarrow \mathcal{M}.$$

Le premier élément X_0 du schéma simplicial est la carte pour \mathcal{M} . Ensuite, le schéma X_1 devra jouer le rôle de carte pour $X_0 \times_{\mathcal{M}} X_0$. Donc, la lissité de $X_0 \rightarrow \mathcal{M}$ est équivalent à la lissité des deux projections $\partial_0, \partial_1 : X_1 \rightarrow X_0$. Ces sont les deux premières parties de la condition de Grothendieck-Pridham, notées $G.P_{1,0}$ et $G.P_{1,1}$. Dans le cadre de notre construction, nous renvoyons à [BENZ12] pour la preuve de ces conditions. Pour la suite, pour tout n et tout $0 \leq k \leq n$ Pridham considère un schéma noté $Match_{\Lambda_n^k}(X)$ avec un morphisme

$$X_n \rightarrow Match_{\Lambda_n^k}(X).$$

La condition $G.P_{n,k}$ est que ce morphisme est lisse et surjectif. Ceci est un analogue géométrique à la condition de Kan classique.

Si X_n sont des schémas de type fini sur k , il suffit de prouver que le morphisme est formellement lisse et surjectif sur les points à valeurs dans un k -algèbre artinien local de type fini B .

Notre but est de construire un schéma simplicial de Grothendieck-Pridham pour le $(n+1)$ -champ des éléments de Maurer-Cartan considéré dans [BENZ12]. On obtiendra ainsi une construction directe d'un $(n+1)$ -champ géométrique. Notre schéma simplicial sera très naturel, alors que si on applique la construction de Pridham on obtiendrait une présentation très compliquée.

Dans notre cas, on voudra commencer donc par $X_0 := V_E$, la carte construite dans [BENZ12]. Ce schéma paramétrise les éléments de Maurer-Cartan pour la dg-catégorie \mathcal{P} fixée au départ. Ensuite, X_1 sera le schéma des paramètres pour les triplets $\{(E, \eta), (F, \zeta), \alpha\}$ où (E, η) et (F, ζ) sont des MC-objets et α une quasi-équivalence entre les deux. Plus généralement, X_n devrait correspondre au nerf consistant des suites de n quasi-équivalences entre MC-objets.

Pour obtenir la lissité requise par la condition $G.P$, on utilisera le *nerf cohérent*. Afin de définir ceci, nous commençons dans la première partie du papier, par une exposition de la notion de *foncteur faible* entre dg-catégories. La notion de foncteur faible fait également rentrer la notion d'élément de Maurer-Cartan, restant dans le même style. Cette construction est sans doute bien connue aux experts des dg et A_∞ -catégories, mais il semblerait utile d'avoir une description explicite.

On démontre ainsi le théorème suivant (Corollaire 2.7) : le schéma simplicial défini par $X(B) = NC^*(MC(\mathcal{P} \otimes_k B))$ satisfait aux conditions de Grothendieck-Pridham $G.P_{n,k}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq n$.

1 La catégorie des foncteurs faibles

Le but de cette section est de construire une dg-catégorie des foncteurs faibles, qu'on notera par $\mathcal{FF}(A, B)$. On notera ainsi une dg-catégorie des semi-foncteurs faibles par ${}^s\mathcal{FF}(A, B)$ et la dg-catégorie pleine des foncteurs faibles strictement unitaires par $\mathcal{FF}^{su}(A, B)$.

Les objets de ces deux catégories seront bien définis dans les définitions (1.1) et (1.2), et on donnera ensuite les morphismes dans la définition (1.3).

Définition 1.1 *Soient A et B deux dg-catégories. On va définir, ici et en (1.3), la dg-catégorie des semi-foncteurs faibles ${}^s\mathcal{FF}(A, B)$. Les objets de cette catégorie sont les semi-foncteurs faibles $\mathcal{F} : A \rightarrow B$ comprenant $\mathcal{F} : ob(A) \rightarrow ob(B)$ et pour toute suite*

$$\{X_0 \xleftarrow{a_1} X_1 \xleftarrow{a_2} \dots \xleftarrow{a_{n-1}} X_{n-1} \xleftarrow{a_n} X_n\} \text{ } X_i \in ob(A), a_i \in A^{k_i}(X_i, X_{i-1}), i \in \{1, \dots, n\} \text{ .}$$

Le foncteur bar \mathcal{F} appliqué sur les a_i définit par

$$\begin{aligned} d_B \mathcal{F}(a_1 | \dots | a_n) &= - \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i + i} \mathcal{F}(a_1 | \dots | da_i | \dots | a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \mathcal{F}(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \mathcal{F}(a_1 | \dots | a_i) \mathcal{F}(a_{i+1} | \dots | a_n) \end{aligned}$$

avec $\tau_i = \sum_{k=1}^i \dim(a_k)$ et tel que :

$$\mathcal{F}(a_1 | \dots | a_n) \in B^k(X_0, X_n), \quad k = \sum_{i=1}^n k_i + 1 - n.$$

Définition 1.2 Si de plus, un objet \mathcal{F} de ${}^s\mathcal{FF}(A, B)$ satisfait la condition :

1. $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ dans $H^0(B(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_X))$, alors on dira que \mathcal{F} est un foncteur faible, et on notera par $\mathcal{FF}(A, B) \subset {}^s\mathcal{FF}(A, B)$ la sous-dg-catégorie pleine des foncteurs faibles.

Si \mathcal{F} satisfait aux conditions plus fortes

2. $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ dans $B(\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_X)$, et
3. $\mathcal{F}(a_1 | \dots | a_i | 1 | a_{i+2} | \dots | a_n) = 0$ dans B .

Alors on dira que \mathcal{F} est strictement unitaire ('su') et on notera par

$$\mathcal{FF}^{su}(A, B) \subset \mathcal{FF}(A, B)$$

la sous-dg-catégorie pleine des foncteurs faibles strictement unitaires.

Définition 1.3 Pour tout objets $F, G \in \text{ob}(\mathcal{FF}(A, B))$, $\mathcal{FF}(A, B)(F, G)$ est le complexe vérifiant :

Un élément $\eta \in \mathcal{FF}(A, B)(F, G)^k$ sera la donnée pour chaque $n \geq 0$, pour toute suites $X_0, X_1, \dots, X_n \in \text{ob}(A)$ et pour toute famille de flèches $\{a_i \in A^{k_i}(X_i, X_{i-1})\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$, de

$$\begin{cases} \eta(a_1 | \dots | a_n) \in B^l(\mathcal{F}(X_n), \mathcal{F}(X_0)) & l = \sum_{i=1}^n k_i + 1 - n \\ \text{et pour } n = 0 : & \eta_{X_0} \text{ est une transformation naturelle} \end{cases}$$

où η est une application multi-linéaire :

$$\eta : A^{k_n}(X_n, X_{n-1}) \otimes \dots \otimes A^{k_1}(X_1, X_0) \rightarrow B^l(\mathcal{F}(X_n), \mathcal{F}(X_0)).$$

On définit la différentielle d de ce complexe

$$d_{FG}(\eta) \in \mathcal{FF}(A, B)^{k+1}(F, G)$$

par

$$\begin{aligned}
d_{FG}(\eta)(a_1|\dots|a_n) &= -d(\eta(a_1|\dots|a_n)) \\
&+ \sum_{i=1}^n (-1)^{(\tau_i+i)} \eta(a_1|\dots|da_{i+1}|\dots|a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \eta(a_1|\dots|a_i a_{i+1}|\dots|a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \eta(a_1|\dots|a_i) G(a_{i+1}|\dots|a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} F(a_1|\dots|a_i) \eta(a_{i+1}|\dots|a_n)
\end{aligned} \tag{1}$$

avec $\tau_i = \sum_{k=1}^i \dim(a_k)$.

Définition 1.4 On définit la composition dans la dg-catégorie des foncteurs faibles par

$$\begin{aligned}
\mathcal{FF}(A, B)(G, H) \otimes \mathcal{FF}(A, B)(F, G) &\rightarrow \mathcal{FF}(A, B)(F, H) \\
(\eta \otimes \varphi) &\mapsto (\eta \circ \varphi)(a_1|\dots|a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(a_1|\dots|a_i) \eta(a_{i+1}|\dots|a_n).
\end{aligned}$$

Notre objectif est de démontrer le lemme suivant dans $\mathcal{FF}(A, B)$.

Lemme 1.5 1. La différentielle d définit dans (1) vérifie :

$$d^2(\eta) = 0.$$

2. La différentielle de la composition sera donnée par

$$d(\eta \circ \varphi) = d(\eta)\varphi + (-1)^{|\eta|} \eta d(\varphi).$$

Avant de faire la démonstration du lemme dans $\mathcal{FF}(A, B)$, on construit une sous-catégorie $\mathfrak{M}(A, B)$ comme suit :

Définition 1.6 On définit la catégories des flèches, comme une sous-catégorie de celle des foncteurs faibles, et on la note par $\mathfrak{M}(A, B)$. Cette catégorie sera définie pour toutes dg-catégories A et B par :

- $ob(\mathfrak{M}(A, B)) = \{\varphi : ob(A) \rightarrow ob(B)\}.$
- $\forall k, \quad \forall \varphi, \psi \in ob(\mathfrak{M}(A, B)) :$
 $\mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)^k = \{f(a_1, \dots, a_n) \in B^{\varphi(X_0), \psi(X_n)}, \quad \forall X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_n\}.$

L'ensemble de tout les flèches dans $\mathfrak{M}(A, B)$ sera noté par

$$\mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi) := \Pi_k \text{Hom}(A^{X_0, X_1} \otimes \dots \otimes A^{X_{n-1}, X_n}, B^{\varphi X_n, \psi X_0}).$$

Définition 1.7 Vu que $\mathfrak{M}(A, B)$ est défini comme une sous-catégorie de $\mathcal{FF}(A, B)$ telle que $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) = 0$, alors la différentielle sur la catégorie $\mathfrak{M}(A, B)$ sera donnée pour tout $f \in \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)$ par

$$\begin{aligned} d(f)(a_1 | \dots | a_n) &= -d(f(a_1 | \dots | a_n)) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i + i} f(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n). \end{aligned} \tag{2}$$

On cherche maintenant à définir la composition dans $\mathfrak{M}(A, B)$.

Définition 1.8 soient $f \in \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)$ et $g \in \mathfrak{M}(A, B)(\psi, \omega)$, la composition

$$\begin{aligned} \circ_{\mathfrak{M}(A, B)} : \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi) \otimes \mathfrak{M}(A, B)(\psi, \omega) &\rightarrow \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \omega) \\ (f \otimes_{\mathfrak{M}(A, B)} g) &\mapsto g \circ f : \varphi \xrightarrow{f} \psi \xrightarrow{g} \omega \end{aligned}$$

est donnée par

$$(g \circ f)(a_1, \dots, a_n) := \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g(a_1, \dots, a_i) f(a_{i+1}, \dots, a_n).$$

On formule la même propriété que le lemme (1.5) pour $\mathfrak{M}(A, B)$, car la démonstration sera plus simple dans ce cas, et conduira au lemme (1.5) par le formalisme des catégories \mathcal{MC} des éléments de Maurer-Cartan (voir [BENZ13]).

Lemme 1.9 1. La différentielle d définit dans (2) vérifie :

$$d^2(\eta) = 0.$$

2. La différentielle de la composition sera donnée par

$$d(\eta \circ \varphi) = \eta d(\varphi) + (-1)^{|\varphi|} d(\eta) \varphi.$$

Preuve

On démontre le lemme (1.9) :

1. D'après la définition (1.7) de la différentielle d sur la catégorie $\mathfrak{M}(A, B)$ mentionnée dans (2), on a :

$$\begin{aligned} d(f)(a_1|...|a_n) &= -d(f(a_1|...|a_n)) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} f(a_1|...|da_{i+1}|...|a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n). \end{aligned}$$

Posons $g = d(f)$.

Pour tout $g \in \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)^k$ on a $d(g) \in \mathfrak{M}(A, B)(\varphi, \psi)^{k-1}$, donc

$$d^2(f) = d(d(f)) = d(g) \quad (3)$$

et on appliquant (3) dans la même formule (2), on trouve

$$\begin{aligned} d(g)(a_1|...|a_n) &= -d(g(a_1|...|a_n)) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} g(a_1|...|da_{i+1}|...|a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \end{aligned} \quad (4)$$

donc

$$d(d(f))(a_1|...|a_n) = -d(d(f)(a_1|...|a_n)) \quad (5)$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} d(f)(a_1|...|da_{i+1}|...|a_n) \quad (6)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i d(f)(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n) \quad (7)$$

Le terme $d(d(f))(a_1|...|a_n)$ est la somme de trois termes (5), (6) et (7).

On note par

$$\begin{aligned} A &:= d(d(f))(a_1|...|a_n), \\ A_1 &:= d(d(f)(a_1|...|a_n)), \\ A_2 &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} d(f)(a_1|...|da_{i+1}|...|a_n), \\ A_3 &:= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i d(f)(a_1|...|a_i a_{i+1}|...|a_n), \end{aligned}$$

de sorte que

$$d(d(f))(a_1|\dots|a_n) = A = -A_1 + A_2 + A_3.$$

On va développer et simplifier chaque terme comme suit :

On appliquant la définition (1.7) de la différentielle d sur les trois termes, on obtient

$$A_1 = d\left(-df(a_1|\dots|a_n)\right) \quad (8)$$

$$+ d\left(\sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} f(a_1|\dots|da_{i+1}|\dots|a_n)\right) \quad (9)$$

$$+ d\left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1|\dots|a_i a_{i+1}|\dots|a_n)\right). \quad (10)$$

On remarque dans (8) la présence d'un terme $d(df(a_1|\dots|a_n)) = 0$ car $d^2 = 0$.

On sait que la différentielle d'une somme est égale à la somme des différentielles, donc on appliquant ça sur les termes (9) et (10), on trouve :

$$A_1 = \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} d(f(a_1|\dots|da_{i+1}|\dots|a_n)) \quad (11)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i df(a_1|\dots|a_i a_{i+1}|\dots|a_n). \quad (12)$$

Le terme (6) noté par A_2 donne

$$A_2 = -\sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(df(a_1|\dots|da_{i+1}|\dots|a_n) \right) \quad (13)$$

$$+ \sum_{j=1}^n (-1)^{\tau'_j+j} f(a_1|\dots|da_{j+1}|\leftrightarrow|da_{i+1}|\dots|a_n) \quad (14)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f(a_1|\dots|a_j a_{j+1}|\leftrightarrow|da_{i+1}|\dots|a_n). \quad (15)$$

La notation $f(a_1|\dots|da_{j+1}|\leftrightarrow|da_{i+1}|\dots|a_n)$ signifie que les termes da_{j+1} et da_{i+1} sont quelque part mais sans spécifier dans quel ordre; et qu'il y a aussi le terme avec $|d(da_{i+1})|$. Dans (15) il y a aussi les termes avec $|a_i da_{i+1}|$ et $|(da_{i+1})a_{i+2}|$. D'autre part, les degrés τ'_j sont définies de la même façon que τ_j mais tenant compte du terme da_{i+1} à sa place.

On peut écrire A_2 comme somme des trois termes A_2^1 , A_2^2 et A_2^3 ce qui donne

$$A_2 := -A_2^1 + A_2^2 + A_2^3$$

tels que

$$\begin{aligned} A_2^1 &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(df(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \right), \\ A_2^2 &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{j+1} | \leftrightarrow | da_{i+1} | \dots | a_n) \right), \\ A_2^3 &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \leftrightarrow | da_{i+1} | \dots | a_n) \right). \end{aligned}$$

La somme du terme (13) avec le premier terme de A_1 vaut 0.

Dans le terme (14) noté par A_2^2 , on remarque l'existence de deux dérivées da_{i+1} à cause de la première dérivation, et da_{j+1} qui vient de la deuxième, ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } j < i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | da_{j+i} | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j = i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | d^2 a_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j > i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | da_{j+i} | \dots | a_n). \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$A_2^2 = \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^i (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{j+i} | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (16)$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left((-1)^{\tau_{i+1}+i+1} f(a_1 | \dots | d^2 a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (17)$$

$$- \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=i+2}^n (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | da_{j+i} | \dots | a_n) \right). \quad (18)$$

Le terme $A_2^2 = 0$ car dans (17) il y a $d^2 = 0$ donc tout le terme est nul, et les termes (16) et (18) sont les mêmes avec signes différents, donc leur somme est nulle.

Dans le terme (15) noté par A_2^3 , on remarque l'existence de deux compositions $a_i a_{i+1}$ à cause de la première dérivation, et $a_j a_{j+1}$ qui vient de la deuxième, ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } j < i-1 & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j = i-1 & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_{i-1} a_i a_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j = i & \text{alors c'est } (-1)^i f(a_1 | \dots | a_i a_{j+1} a_{i+2} | \dots | a_n), \\ \text{si } j > i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_n). \end{cases}$$

Donc on peut écrire :

$$A_2^3 = \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{i-2} (-1)^j f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | d_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (19)$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left((-1)^{i-1} f(a_1 | \dots | a_{i-1} d_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (20)$$

$$+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left((-1)^i f(a_1 | \dots | d_i a_{j+1} a_{i+2} | \dots | a_n) \right) \quad (21)$$

$$- \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=i+2}^{n-2} (-1)^j f(a_1 | \dots | d_i a_{i+1} | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_n) \right). \quad (22)$$

Le terme (7) noté par A_3 donne

$$A_3 = - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(df(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (23)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{j+1} | \dots | a_n) \quad (24)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_n). \quad (25)$$

On peut écrire A_3 aussi comme somme des trois termes A_3^1 , A_3^2 et A_3^3 ce qui donne

$$A_3 := -A_3^1 + A_3^2 + A_3^3$$

tels que

$$\begin{aligned} A_3^1 &:= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(df(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right), \\ A_3^2 &:= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{j+1} | \dots | a_n) \right), \\ A_3^3 &:= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_n) \right). \end{aligned}$$

Le terme (A_3^1) s'annule avec le terme restant de A_1 comme il est.

Dans le terme (24) noté par A_3^2 , on remarque l'existence de la composition $a_i a_{i+1}$ à cause de la première dérivation, et de la dérivée da_{i+1} à cause de la deuxième,

ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } j > i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | da_{j+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j = i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | da_i a_{i+1} - a_i da_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j < i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | da_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n). \end{cases}$$

Donc

$$A_3^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (26)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left((-1)^{\tau_i+\tau_{i+1}+i} f(a_1 | \dots | d(a_i) a_{i+1}) - a_i d(a_{i+1}) | \dots | a_n \right) \quad (27)$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=i+2}^{n-1} (-1)^{\tau_j+j} f(a_1 | \dots | da_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right). \quad (28)$$

Ce terme s'annule avec A_2^3 .

Dans le dernier terme (25) noté par A_3^3 , on remarque l'existence de deux compositions $a_i a_{i+1}$ à cause de la première dérivation, et $a_j a_{j+1}$ qui vient de la deuxième, ordonnées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } j < i-1 & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j = i-1 & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_{i-1} a_i a_{i+1} | \dots | a_n), \\ \text{si } j = i & \text{alors c'est } (-1)^i f(a_1 | \dots | a_i a_{j+1} a_{i+2} | \dots | a_n), \\ \text{si } j > i & \text{alors c'est } f(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_n). \end{cases}$$

Donc on peut écrire :

$$A_3^3 = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j f(a_1 | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (29)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left((-1)^i f(a_1 | \dots | a_{i-1} a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \quad (30)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left((-1)^{i+1} f(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} a_{i+2} | \dots | a_n) \right) \quad (31)$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=i+2}^{n-1} (-1)^j f(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_j a_{j+1} | \dots | a_n) \right). \quad (32)$$

On remarque que les termes (30) et (31) sont opposés l'un à l'autre, car $(-1)^i (-1)^i = 1$ et $(-1)^{i+1} (-1)^i = -1$. Les termes (29) et (32) sont opposés donc leurs sommes est 0. Finalement on a bien $d^2(\eta) = 0$.

2. On montre maintenant que

$$d(\eta \circ \varphi) = d(\eta)\varphi + (-1)^{|\eta|}\eta d(\varphi)$$

On a

$$\begin{aligned} d(\eta \circ \varphi)(a_1 | \dots | a_n) &= -d(\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n)) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i + i} \eta \circ \varphi(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \end{aligned}$$

On note par B_1 , B_2 et B_3 , les trois termes de cette égalité de sorte que

$$d(\eta \circ \varphi)(a_1 | \dots | a_n) = -B_1 + B_2 + B_3$$

et

$$\begin{aligned} B_1 &= d(\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n)) \\ B_2 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i + i} \eta \circ \varphi(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \\ B_3 &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \end{aligned}$$

Comme

$$\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \eta(a_1, \dots, a_i) \varphi(a_{i+1}, \dots, a_n)$$

alors

$$\begin{aligned} B_1 &= d(\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n)) \\ &= d\left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \eta(a_1 | \dots | a_i) \varphi(a_{i+1} | \dots | a_n)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(d\eta(a_1 | \dots | a_i) \varphi(a_{i+1} | \dots | a_n) + (-1)^{|\eta|} \eta(a_1 | \dots | a_i) d\varphi(a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(d\eta(a_1 | \dots | a_i) \varphi(a_{i+1} | \dots | a_n) \right) + (-1)^{|\eta|} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\eta(a_1 | \dots | a_i) d\varphi(a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \\ &= d\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n) + (-1)^{|\eta|} \eta \circ d\varphi(a_1 | \dots | a_n) \end{aligned}$$

Donc

$$d(\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n)) = d\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n) + (-1)^{|\eta|} \eta \circ d\varphi(a_1 | \dots | a_n) \quad (33)$$

De la même manière, on calcule B_2

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta(a_1 | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_n) \right) \end{aligned}$$

Dans B_2 , et pour tout i fixé, le terme da_{i+1} est présent avant a_j pour $j < i+1$ donc dans η et après a_{j+1} sinon, donc dans φ . Ça nous permet d'écrire B_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_n) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta(a_1 | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} B_3 &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-2} \eta(a_1 | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_n) \right) \end{aligned}$$

Dans B_3 , et pour tout i fixé, le terme $a_i a_{i+1}$ est présent avant a_j pour $j < i+1$ donc dans η et après a_{j+1} sinon, donc dans φ . Ça nous permet d'écrire B_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_3 &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-2} \eta(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_n) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-2} \eta(a_1 | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right) \end{aligned}$$

On remarque qu'il y a deux termes dans B_1, B_2 et B_3 , l'un avec des applications sur η et l'autre sur φ . On rassemblant les termes qui dépendent de η ensembles, et ceux dépendant de φ ensemble, on trouve

$$\begin{aligned}
-B_1 + B_3 + B_3 &= d\eta \circ \varphi(a_1 | \dots | a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta(a_1 | \dots | da_{i+1} | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_n) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-2} \eta(a_1 | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_n) \right) \\
&+ (-1)^{|\eta|} \eta \circ d\varphi(a_1 | \dots | a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^n (-1)^{\tau_i+i} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta(a_1 | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | da_{i+1} | \dots | a_n) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{n-2} \eta(a_1 | \dots | a_j) \varphi(a_{j+1} | \dots | a_i a_{i+1} | \dots | a_n) \right)
\end{aligned}$$

tels que la somme des trois premiers termes vaudrait $d(\eta)\varphi(a_1 | \dots | a_n)$ et la somme des trois derniers vaudrait $(-1)^{|\eta|} \eta d(\varphi)(a_1 | \dots | a_n)$

Ce qui montre le lemme (1.9)

Lemme 1.10 *La catégorie des foncteurs faibles est égale à la catégorie des éléments de Maurer-Cartan de la catégories des flèches, autrement dit :*

$$\mathcal{FF}(A, B) = \mathcal{MC}(\mathfrak{M}(A, B)) \quad (34)$$

Soit $\eta \in \mathcal{FF}(A, B)(f, g)$. par définition, la catégorie des foncteurs faibles est égale à celle des éléments de Maurer-Cartan des flèches, on note par d_{fg} la différentielle dans \mathfrak{M} et par d_{FG} celle dans \mathcal{FF}

Démonstration du lemme (1.5) : On a déjà démontré que $d_{fg}^2 = 0$ dans $MC(\mathfrak{M})$, or $MC(\mathcal{M}) = \mathcal{FF}$ donc $d_{fg} = d_{FG}$ et donc $d_{fg}^2 = d_{FG}^2 = 0$ ce qui montre le lemme (1.5).

On note par $Comp_{\dots}$ la composition dans \mathcal{FF} . On a :

Conjecture 1.11 *Soient A, B et C trois dg-catégories, alors*

$$Comp_{ABC} \in \mathcal{FF}\left(\mathcal{FF}(B, C), \mathcal{FF}(\mathcal{FF}(A, B), \mathcal{FF}(A, C))\right)$$

2 Un schéma simplicial de Grothendieck-Pridham

Par définition, on sait qu'il existe des liens entre les ∞ -groupoïdes, les espaces et les ensembles simpliciaux ($Ens^{\Delta^o} := \{\Delta^o \rightarrow Ens\}$), donc tout préfaisceau d'un ∞ -groupoïde

peut être considéré comme un préfaisceau simplicial X avec

$$\begin{aligned} X &= AlgCom_k \rightarrow Ens^{\Delta^o} \\ &= AlgCom_k \times \Delta^o \rightarrow Ens \\ &= \Delta^o \rightarrow Fonct(AlgCom_k, Ens) \end{aligned}$$

Dans [PRID], il considère X tel que pour tout $n \in \Delta$ les $X_n : AlgCom_k \rightarrow Ens$ sont représentables par des schémas.

Le cas où X est un schéma simplicial, on va expliciter le schéma simplicial

$$\cdots \rightrightarrows \cdots X_2 \rightrightarrows X_1 \rightrightarrows X_0$$

tel que les X_i sont :

- X_0 : représente la carte V sur \mathcal{MC} ,
- X_1 : représente une carte pour

$$X_0 \times_{\mathcal{MC}} X_0 := \{(x_0, x_1, \alpha) \text{ tels que } x_0, x_1 \in X_0 \text{ et } \alpha \text{ est l'équivalence entre } x_0 \text{ et } x_1 \text{ et } d(\alpha) = 0\}$$

autrement dit

$$X_1 := \{(x_0, x_1, \alpha) \text{ avec } \alpha \in \mathcal{P}^0(x_0, x_1), d(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha \text{ eq} \}$$

On a déjà explicité le cas $X_1 \rightrightarrows X_0$ dans [BENZ12] et on peut le représenter de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} & & Match_{\wedge_0^1}(X) = X_0 \\ & \nearrow & \\ X_1 & & \\ & \searrow & \\ & & Match_{\wedge_1^1}(X) = X_0 \end{array}$$

D'une manière analogue, on définit X_2 par

$$\begin{aligned} X_2 := \{ & (x_0, x_1, x_2, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \alpha_{1,2}, \alpha_{0,1,2}) \text{ avec } \alpha_{i,j} \in \mathcal{P}^0(x_i, x_j), \alpha_{0,1,2} \in \mathcal{P}^{-1}(x_0, x_2), \\ & d(\alpha_{ij}) = 0 \text{ et } d(\alpha_{0,1,2}) = \alpha_{1,2}\alpha_{0,1} - \alpha_{0,2} \text{ ainsi que } (\alpha_{ij}) \text{ eq } \forall i < j; i, j \in \{0, 1, 2\} \}. \end{aligned}$$

On généralise cette construction pour n quelconque par le nerf cohérent, voir ci-dessous, et on cherche à démontrer la lissité formelle de la carte

$$X_n \rightarrow Match_{\wedge_k^n}(X), \quad \forall n \tag{35}$$

On considère un foncteur

$$\begin{aligned} R : AlgCom_k &\rightarrow dg-Cat \\ B &\mapsto R(B) \end{aligned}$$

$R(B)$ est une catégorie dérivée graduée B -linéaire. On va appliquer ceci au foncteur

$$R(B) := \mathcal{MC}_{\mathcal{P}}(B) = \mathcal{MC}(\mathcal{P} \otimes_k B)$$

mais ici on pourra travailler seulement avec R .

On a en particulier, le foncteur $ob(R) : AlgCom_k \rightarrow Ens$ et pour tout $B \in AlgCom_k$, pour tout $x, y \in ob(R)(B)$;

$$R^i(x, y) : AlgCom_B \rightarrow Mod$$

où $Mod \rightarrow AlgCom_B$ est la catégorie fibrée de fibres sur B'/B , la catégorie des B' -modules.

$$R^i(x, y)(B') = R(B')(x/B', y/B')$$

2.0.1 Hypothèses de représentabilité (REPR)

1. Le foncteur $ob(R) : AlgCom_k \rightarrow Ens$ est représentable par un schéma $\underline{ob}(R)$.
2. Pour tout i , le foncteur R^i est représenté par un fibré vectoriel sur $ob(R) \times ob(R)$.
C'est-à-dire : pour tout $X, Y : Spec(B) \rightarrow ob(R) \times ob(R)$, alors $R^i(B)(X, Y)$ est l'ensemble des sections $\{R^i \leftarrow Spec(B) \rightarrow ob(R) \times ob(R)\}$

Proposition 2.1 *Pour le cas $R(B) = MC(P \otimes_k B)$, les hypothèses de représentabilité sont vrais.*

Le nerf cohérent

Si \mathcal{A} est une dg-catégorie, on définit $NC(\mathcal{A}) \in Ens^{\Delta^o}$ par

$$NC(\mathcal{A})_n := \mathcal{FF}^{su}(I_n^{dg}, \mathcal{A})$$

où I_n^{dg} est la dg-catégorie avec objets $\{0, 1, \dots, n\}$ et

$$I_n^{dg}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ k & \text{en degré 0 si } i \leq j \end{cases}$$

On note par e_{ij} l'élément de base de $I_n^{dg}(i, j)$ avec $e_{jk} \cdot e_{ij} = e_{ik}$, et e_{ii} représente l'identité.

Explicitement

Soit $\alpha \in NC(\mathcal{A})$ la donnée pour tout n de $X_0, X_1, \dots, X_n \in ob(\mathcal{A})$ et pour toute suite croissante $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $\alpha(i_0, \dots, i_k) \in \mathcal{A}^{1-k}(X_{i_0}, X_{i_k})$ satisfait aux conditions :

- (i) “ su ” : si $i_j = i_{j+1}$ alors $\alpha(i_0, \dots, i_j, i_{j+1}, \dots, i_k) = 0$. Sauf pour le cas où $k = 1$ qui donne $\alpha(i, i) = 1_{X_i}$ l'identité sur X_i .
- (ii)

$$d(\alpha(i_0, \dots, i_n)) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha(i_j, \dots, i_n) \alpha(i_0, \dots, i_j) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1) \alpha(i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_n)$$

On compose avec le foncteur $R : AlgCom_k \rightarrow dg - Cat$ on obtient

$$\overline{X} := NC \circ R : AlgCom \rightarrow Ens^{\Delta^o}$$

qui donne pour tout $B \in AlgCom_k$ son image

$$\overline{X}_n^{(B)} = \{\alpha \in NC(R(B)), \forall (X_0, \dots, X_n) \in (ob(R(B)))^{n+1}, \forall 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n, \alpha(i_0, \dots, i_k) \in \mathcal{A}^{1-k}(X_{i_0}, X_{i_k})\}$$

Proposition 2.2 *Si R satisfait (REPR) alors, \overline{X}_n est représentable par un schéma (de type fini sur k).*

On a maintenant un schéma simplicial $\overline{X} : AlgCom_k \rightarrow Ens^{\Delta^o}$, si \overline{X}_n est représenté par un schéma.

Modification

On va modifier les conditions de sorte que les α soient des équivalences. On définit ainsi le sous-ensemble simplicial $NC^*(\mathcal{A}) \subset NC(\mathcal{A})$ par :

$$NC^*(\mathcal{A})_n = \{(X_0, \dots, X_n; \alpha) \text{ tels que } \forall i_0 \leq i_1, \quad \alpha(i_0, i_1) \in \mathcal{A}^0(X_{i_0}, X_{i_1}) \text{ est une équivalence} \}.$$

Proposition 2.3 *Si R satisfait (REPR), alors le foncteur $X(B) := NC^* \circ R(B)$ est un sous-schéma simplicial ouvert de \overline{X} . c'est-à-dire que pour tout $n : X_n(B) = NC_n^*(R(B)) \subset NC_n(R(B)) = \overline{X}_n(B)$ est représenté par un ouvert de Zariski.*

La construction de Grothendieck-Pridham

Sur le schéma simplicial X , on considère

$$Match_{\wedge_k^n}(X) = \{f_i \in X_{n-1}; \text{ tel que } \partial_k(f_i) = \partial_k(f_j) \text{ dans } X_{n-2}\}$$

les f_i sont les $i^{\text{ème}}$ faces.

Remarque 2.4 $Match_{\wedge_k^n}(X)$ est également un schéma, et on a un morphisme de schémas $\mu : X_n \rightarrow Match_{\wedge_k^n}(X)$

Condition de $G.P_{n,k}$:

Le morphisme $\mu : X_n \rightarrow Match_{\wedge_k^n}(X)$ est lisse. Il suffit de prouver que c'est formellement lisse. Il suffit de prouver que pour tout idéal $I \subset B$ avec $I^2 = 0$ (B peut être artinien si nécessaire) : soit $\alpha \in Match_{\wedge_k^n}(X)$ et $\tilde{\alpha} \in X_n(B/I)$ tel que $\mu(\tilde{\alpha}) = \alpha/B/I$, alors il existe un relèvement $\hat{\alpha} \in X_n(B)$ tel que $\hat{\alpha}/B/I = \tilde{\alpha}$ et $\mu(\hat{\alpha}) = \alpha$.

Remarque 2.5 le plus grand schéma simplicial \overline{X} peut probablement être quasi- $G.P_{n,k}$. C'est-à-dire satisfait au $G.P_{n,k}$, $\forall 0 < k < n$ pour les faces intérieurs. C'est une condition $G.P$ sur les quasi-catégories.

Théorème 2.6 *Le schéma simplicial défini par $X(B) := NC^*(R(B))$ satisfait aux conditions de Grothendieck-Pridham $G.P_{n,k}$ pour tout $n \geq 2$ et tout $0 \leq k \leq n$.*

Si les complexes de morphismes de \mathcal{P} sont à support en degrés $\geq -m$ alors $X.$ est un $(m+1)$ -hypergroupeïde.

Le problème du sommet : pour $R(B) = MC(P \otimes_k B)$, $X = NC^* \circ R$ satisfait $GP_{1,0}$ et $GP_{1,1}$. Voir [BENZ12] pour la preuve de $G.P_{1,0}$, et $G.P_{1,1}$ est similaire.

Corollaire 2.7 *Soit \mathcal{P} une dg-catégorie qui satisfait aux conditions de [BENZ12] qui ont été rappelées dans l'introduction. On pose $R(B) := MC(\mathcal{P} \otimes_k B)$ et $X(B) := NC^*(R(B))$. Alors $X.$ satisfait $G.P_{n,k}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq k \leq n$, donc $X.$ est un schéma simplicial de Grothendieck-Pridham.*

Corollaire 2.8 [PRID] *Dans ce cas $R(B) = MC(P \otimes_k B)$, le schéma simplicial X correspond à un n -champs géométrique.*

La suite du papier est consacré à la démonstration du théorème 2.6. Soit B un k -algèbre commutatif. On appliquera la discussion du nerf cohérent pour $\mathcal{A} = R(B)$.

2.0.2 Les éléments de $Match_{\wedge_k^n}(X)$

Soit $\alpha \in Match_{\wedge_k^n}(X)$, un tel élément est défini de la manière suivante :

1. Pour $n \geq 2$: Pour toute suites $X_0, \dots, X_n \in ob(R(B))$ et $0 \geq i_0 < \dots < i_l \geq n$, alors $\alpha(i_0, \dots, i_l) \in R^{n-l}(B)(X_{i_0}, X_{i_l})$.
2. Les i_\wedge sauf si $(i_0, \dots, i_l) = (0, \dots, \hat{k}, \dots, n)$ ou $(i_0, \dots, i_l) = (0, \dots, n)$.

Un élément de $X_n(B)$ est la même chose que les $\alpha(0, \dots, \hat{k}, \dots, n)$ et $\alpha(0, \dots, n)$.

Pour $n \geq 2$ la condition (i) des inversibilité de $\hat{\alpha}$ sont automatique à partir de α . Pour $n = 2$: Si deux des $\alpha(0, 1)$, $\alpha(1, 2)$ et $\alpha(0, 2)$ sont inversibles et $d(\alpha(1, 2)) = \alpha(1, 2)\alpha(0, 1) - \alpha(0, 2)$, alors le troisième aussi est inversible. Donc on doit juste s'occuper de la condition (ii).

On pose X_0, \dots, X_n sur B , on note par i_\wedge les deux cas particuliers $(0, \dots, \hat{k}, \dots, n)$ et $(0, \dots, n)$, dans ce cas, on est donné $\tilde{\alpha}(i_0, \dots, i_l)$ sur B/I , et on cherche $\hat{\alpha}(i) = \alpha(i)$ sauf pour les i_\wedge et $\hat{\alpha}(i) = \tilde{\alpha}(i)$ dans B/I . Pour les i_\wedge , on a trois cas :

Cas 1 : Si $0 < k < n$ dans ce cas on a pas besoin d'utiliser l'inversibilité.

Cas 2 : $k = n$ similaire au cas où $k = 0$ qu'on va détailler après.

Cas 3 : $k = 0$ dans ce cas on est donné tout sauf $(1, \dots, n)$ et $(0, 1, \dots, n)$.

On commence maintenant la preuve du théorème (2.6) dans le cas où $n \geq 2$ et $k = 0$

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}(1, \dots, n)) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\ d(\hat{\alpha}(0, \dots, n)) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(0, \dots, j) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n) \end{cases}$$

Notation

Fixons un n

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\hat{\alpha}(1, \dots, n)) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\ \quad = U \\ d(\hat{\alpha}(0, \dots, n)) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(0, \dots, j) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\ \quad = \hat{\alpha}(1, \dots, n) \alpha(0, 1) + \sum_{j=2}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(2, \dots, j) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\ \quad = \hat{\alpha}_1 \alpha + V \end{array} \right.$$

On note par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \alpha(0, 1) \in R(B)^0(X_0, X_1) \\ \alpha a & = & 1 + d(h) \\ a \alpha & = & 1 + d(g) \\ d(a) & = & 0 \quad \text{et} \quad a \in R(B)^0(X_1, X_0) \\ d(\alpha) & = & 0 \\ \hat{\alpha}_0 & = & \hat{\alpha}(0, 1, \dots, n) \in R(B)^{1-n}(X_0, X_n) \\ \hat{\alpha}_1 & = & \hat{\alpha}(1, \dots, n) \in R(B)^{2-n}(X_0, X_n) \end{array} \right.$$

ce qui donne un nouveau système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d(\hat{\alpha}_1) & = & U \\ d(\hat{\alpha}_0) & = & \hat{\alpha}_1 \alpha + V \end{array} \right.$$

Lemme 2.9 *On a*

1. $d(U) = 0$.
2. $d(V) = -U\alpha$ ce qui implique que pour toute solution $\hat{\alpha}_1$ on a $d(\hat{\alpha}_1 \alpha) + d(V) = 0$.

Preuve

1. On a

$$U = d(\hat{\alpha}(1, \dots, n)) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n)$$

donc

$$\begin{aligned} d(U) &= d\left(\sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j)) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j d(\hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n)) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j A_j + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j B_j \end{aligned}$$

avec $A_j = d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j))$ et $B_j = d(\hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n))$.

$$\begin{aligned}
A_j &= d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \circ \hat{\alpha}(1, \dots, j)) \\
&= d(\hat{\alpha}(j, \dots, n))\hat{\alpha}(1, \dots, j) + (-1)^{n-j}\hat{\alpha}(j, \dots, n)d(\hat{\alpha}(1, \dots, j)) \\
&= \left(\sum_{k=j}^n (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, n) \hat{\alpha}(j, \dots, k) + \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \hat{\alpha}(j, \dots, \hat{k}, \dots, n) \right) \hat{\alpha}(1, \dots, j) \\
&\quad + (-1)^{n-j} \hat{\alpha}(j, \dots, n) \left(\sum_{k=1}^j (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, j) \hat{\alpha}(1, \dots, k) + \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{k}, \dots, j) \right) \\
&= \sum_{k=j}^n (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, n) \hat{\alpha}(j, \dots, k) \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \hat{\alpha}(j, \dots, \hat{k}, \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, j) \\
&\quad + (-1)^{n-j} \hat{\alpha}(j, \dots, n) \left(\sum_{k=1}^j (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, j) \hat{\alpha}(1, \dots, k) + \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^k \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{k}, \dots, j) \right) \\
&= \sum_{k=j}^n (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, n) \hat{\alpha}(j, \dots, k) \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \hat{\alpha}(j, \dots, \hat{k}, \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, j) \\
&\quad + \sum_{k=1}^j (-1)^{n+k-j} \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(k, \dots, j) \hat{\alpha}(1, \dots, k) + \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{n+k-j} \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{k}, \dots, j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_j &= d(\hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, [\hat{j}], \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, [\hat{j}], \dots, k) + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{k} \leftrightarrow \hat{j}, \dots, n)
\end{aligned}$$

tels que la notation : $[\hat{j}]$ pour dire que le $j^{\text{ème}}$ terme est enlevé soit du coté gauche soit du coté droit mais pas des deux cotés au même temps, et la notation $\hat{k} \leftrightarrow \hat{j}$ pour dire que le $j^{\text{ème}}$ et le $k^{\text{ème}}$ sont enlevé quelques soit leurs ordres.

Ici on remarque que le $2^{\text{ème}}$ et le $4^{\text{ème}}$ terme de A_j sont les mêmes avec signes opposés donc leurs sommes est nul. Aussi la somme des 1^{er} et $3^{\text{ème}}$ suivant les deux indices k et j donne exactement l'opposé du premier terme de B_j . Le $2^{\text{ème}}$ terme de B_j s'auto-annule car on trouve le même terme deux fois avec signes opposés suivant l'emplacement des indices k et j , et donc $\sum_j (A_j + B_j) = 0$, ce qui montre bien que $d(U) = 0$.

2. Pour montrer que $d(\hat{\alpha}_1 \alpha) + d(V) = 0$ on supposera que $d(\hat{\alpha}_1) = U$ connue.

On a

$$\begin{aligned}
d(\hat{\alpha}_1 \alpha) + d(V) &= d(\hat{\alpha}_1) \alpha + d(V) \\
&= U \alpha + d(V) \\
&= \left(\sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, j) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n) \right) \alpha \\
&\quad + \sum_{j=2}^n (-1)^j d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(2, \dots, j)) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j d(\hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)) \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, j) \alpha + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n) \alpha \\
&\quad + \sum_{j=2}^n (-1)^j d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(2, \dots, j)) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j d(\hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)) \\
&= T_1 + T_2 + T_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{j=1}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(1, \dots, j) \alpha + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(1, \dots, \hat{j}, \dots, n) \alpha \\
T_2 &= \sum_{j=2}^n (-1)^j d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(2, \dots, j)) \\
T_3 &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j d(\hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n))
\end{aligned}$$

Pour T_1 , on le garde comme il est, et on calcule T_2 et T_3 .

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_{j=2}^n (-1)^j d(\hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(2, \dots, j)) \\
&= \sum_{j=2}^n (-1)^j \left(d(\hat{\alpha}(j, \dots, n)) \hat{\alpha}(2, \dots, j) + (-1)^{n-j} \hat{\alpha}(j, \dots, n) d(\hat{\alpha}(2, \dots, j)) \right) \\
&= \sum_{j=2}^n (-1)^j \left(\sum_{k=j}^n (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, n) \hat{\alpha}(j, \dots, k) \hat{\alpha}(2, \dots, j) + \sum_{k=j}^{n-1} \hat{\alpha}(j, \dots, \hat{k}, \dots, n) \hat{\alpha}(2, \dots, j) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n-j} \left(\sum_{k=2}^j (-1)^k \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(k, \dots, j) \hat{\alpha}(2, \dots, k) + \sum_{k=2}^{j-1} (-1)^k \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(2, \dots, \hat{k}, \dots, j) \right) \right)
\end{aligned}$$

Et si on garde les mêmes notations que pour B_j , on remarque qu'il s'agit de la même formule sauf pour le premier indice qui part de 0 au lieu de 1 comme suivant :

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j d(\hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \hat{\alpha}(k, \dots, [\hat{j}], \dots, n) \hat{\alpha}(0, \dots, [\hat{j}], \dots, k) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{k} \leftrightarrow \hat{j}, \dots, n) \right) \end{aligned}$$

On remarque ici que les termes de T_1 ajouter au 1^{er} et au 3^{ème} termes de T_2 ensembles forment l'opposé du 1^{er} terme de T_3 , donc ils s'annulent. Aussi le 2^{ème} et le 4^{ème} terme de T_2 sont les mêmes avec signes opposés donc ils s'annulent. Il reste le 2^{ème} de T_3 qui s'auto-annule puisque suivant l'emplacement des indices k et j on trouve à chaque fois le même terme deux fois mais avec deux signes différents. Conclusion $T_1 + T_2 + T_3 = 0$, ce qui montre notre lemme. ▲

Maintenant on va résoudre le système

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}_1) &= U \\ d(\hat{\alpha}_0) &= \hat{\alpha}_1 \alpha + V \end{cases} \quad (36)$$

Noter que U est de degré $3 - n$ et V est de degré $2 - n$. Dans la 2^{ème} équation du système (36) et en multipliant par a à droite, on trouve

$$\begin{aligned} d(\hat{\alpha}_0)a &= \hat{\alpha}_1 \alpha a + Va \\ &= \hat{\alpha}_1 (1 + d(h)) + Va \\ &= \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1 d(h) + Va \\ &= \hat{\alpha}_1 + (-1)^n d(\hat{\alpha}_1 h) - (-1)^n d(\hat{\alpha}_1) h + Va \end{aligned}$$

car $\hat{\alpha}$ est de degré $2 - n \equiv n \pmod{2}$,

$$d(\hat{\alpha}_1 h) = d(\hat{\alpha}_1) h + (-1)^n \hat{\alpha}_1 d(h) \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha}_1 d(h) = (-1)^n d(\hat{\alpha}_1 h) - (-1)^n d(\hat{\alpha}_1) h$$

donc, en supposant la première équation du système (36), on aurait

$$d(\hat{\alpha}_0)a = \hat{\alpha}_1 + (-1)^n d(\hat{\alpha}_1 h) - (-1)^n U h + Va$$

Par intuition, on remarque que $\hat{\alpha}_1 = -Va + (-1)^n U h$ est une solution. En effet ;

$$\begin{aligned} d(\hat{\alpha}_1) &= d(-Va + (-1)^n U h) \\ &= -d(V)a - U d(h) \\ &= U \alpha a - U(\alpha a - 1) \\ &= U. \end{aligned}$$

On remplace cette solution de la 2^{ème} équation du système (36), on obtient

$$\begin{aligned}
d(\hat{\alpha}_0) &= \hat{\alpha}_1\alpha + V \\
&= (-Va + (-1)^nUh)\alpha + V \\
&= V(1 - a\alpha) + (-1)^nUh\alpha \\
&= -Vd(g) + (-1)^nUh\alpha
\end{aligned}$$

Or

$$d(Vg) = d(V)g + (-1)^nVd(g) \Rightarrow Vd(g) = (-1)^nd(Vg) - (-1)^nd(V)g$$

et

$$\begin{aligned}
d(\hat{\alpha}_1h\alpha) &= d(\hat{\alpha}_1)h\alpha + (-1)^n\hat{\alpha}_1d(h\alpha) \\
&= d(\hat{\alpha}_1)h\alpha + (-1)^n\hat{\alpha}_1d(h)\alpha \\
\Rightarrow d(\hat{\alpha}_1)h\alpha &= d(\hat{\alpha}_1h\alpha) - (-1)^n\hat{\alpha}_1d(h)\alpha
\end{aligned}$$

car $d(h\alpha) = d(h)\alpha$ vu que $d(\alpha) = 0$. Donc notre deuxième équation devient

$$\begin{aligned}
d(\hat{\alpha}_0) &= -Vd(g) + (-1)^nd(\hat{\alpha}_1)h\alpha \\
&= -(-1)^nd(Vg) + (-1)^nd(V)g + (-1)^n[d(\hat{\alpha}_1h\alpha) - (-1)^n\hat{\alpha}_1d(h)\alpha] \\
&= -(-1)^nd(Vg) + (-1)^nd(V)g + (-1)^nd(\hat{\alpha}_1h\alpha) - \hat{\alpha}_1d(h)\alpha \\
&= -d[(-1)^nVg - (-1)^n\hat{\alpha}_1h\alpha] + (-1)^nd(V)g - \hat{\alpha}_1d(h)\alpha
\end{aligned}$$

On peut choisir $\hat{\alpha}_0 = (-1)^n\hat{\alpha}_1h\alpha - (-1)^n\hat{\alpha}_1\alpha g - (-1)^nVg$. En effet ;

$$\begin{aligned}
d(\hat{\alpha}_0) &= d((-1)^n\hat{\alpha}_1h\alpha - (-1)^n\hat{\alpha}_1\alpha g - (-1)^nVg) \\
&= (-1)^nd(\hat{\alpha}_1h\alpha) - (-1)^nd(\hat{\alpha}_1\alpha g) - (-1)^nd(Vg) \\
&= (-1)^nd(\hat{\alpha}_1)h\alpha + \hat{\alpha}_1d(h)\alpha - (-1)^nd(\hat{\alpha}_1)\alpha g - \hat{\alpha}_1\alpha d(g) - (-1)^nd(V)g - Vd(g) \\
&= (-1)^nUh\alpha + \hat{\alpha}_1(\alpha a - 1)\alpha - (-1)^nU\alpha g - \hat{\alpha}_1\alpha(a\alpha - 1) + (-1)^nU\alpha g - Vd(g) \\
&= (-1)^nUh\alpha + \hat{\alpha}_1\alpha a\alpha - \hat{\alpha}_1\alpha - (-1)^nU\alpha g - \hat{\alpha}_1\alpha a\alpha + \hat{\alpha}_1\alpha + (-1)^nU\alpha g - Vd(g) \\
&= (-1)^nUh\alpha - Vd(g)
\end{aligned}$$

Nous avons donc résolu le système d'équations (36), ce qui montre la surjectivité du morphisme de Pridham pour $n \geq 2$ et $k = 0$. On fait maintenant la preuve de la lissité formelle, en suivant les mêmes lignes.

On note par $[\tilde{\alpha}_0]$ et $[\tilde{\alpha}_1]$ les solutions dans $NC(R(B/I))$. Notre objectif est de trouver une solution $\hat{\alpha}$ sur B qui étend α et $[\tilde{\alpha}]$.

On prend sur B deux solutions quelconques $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ tels que $\tilde{\alpha}_0 = [\tilde{\alpha}_0]$ modulo I et $\tilde{\alpha}_1 = [\tilde{\alpha}_1]$ modulo I , et on définit φ et ψ de $I.R^!(B)$ comme les termes d'erreurs des équations du système :

$$\begin{cases} d(\tilde{\alpha}_1) &= U + \varphi \\ d(\tilde{\alpha}_0) &= \tilde{\alpha}_1\alpha + V + \psi \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} d(\tilde{\alpha}_1) &= U + \varphi & \Rightarrow \quad \varphi &= d(\tilde{\alpha}_1) - U \\ d(\tilde{\alpha}_0) &= \tilde{\alpha}_1\alpha + V + \psi & \Rightarrow \quad \psi &= d(\tilde{\alpha}_0) - \tilde{\alpha}_1\alpha - V \end{aligned}$$

On applique la différentielle d sur φ et ψ , on trouve :

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= d^2(\tilde{\alpha}_1) - d(U) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\psi) &= d^2(\tilde{\alpha}_0) - d(\tilde{\alpha}_1\alpha) - d(V) \\ &= d(-\tilde{\alpha}_1)\alpha - d(V) \\ &= (-U + -\varphi)\alpha - d(V) \\ &= -U\alpha - \varphi\alpha + U\alpha \quad \text{car } d(V) = -U\alpha \\ &= -\varphi\alpha. \end{aligned}$$

On note qu'il s'agit des mêmes formules que dans le lemme (2.9). On pose maintenant les deux solutions $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_1$ avec les deux perturbations ε_0 et ε_1 tels que

$$\hat{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_0 - \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1 - \varepsilon_1$$

On applique la différentielle d sur les deux termes pour calculer $d(\varepsilon_0)$ et $d(\varepsilon_1)$ on trouve :

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}_0) &= d(\tilde{\alpha}_0) - d(\varepsilon_0) \\ d(\hat{\alpha}_1) &= d(\tilde{\alpha}_1) - d(\varepsilon_1) \end{cases} \quad (38)$$

En remplaçant le système (38) dans le système (36), le système que nous cherchons à résoudre devient

$$\begin{cases} d(\tilde{\alpha}_1) - d(\varepsilon_1) &= U \\ d(\tilde{\alpha}_0) - d(\varepsilon_0) &= (\tilde{\alpha}_1 - \varepsilon_1)\alpha + V \end{cases} \quad (39)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} d(\varepsilon_1) &= d(\tilde{\alpha}_1) - U \\ d(\varepsilon_0) &= d(\tilde{\alpha}_0) - \tilde{\alpha}_1\alpha - V + \varepsilon_1\alpha \end{cases} \quad (40)$$

donc

$$\begin{cases} d(\varepsilon_1) &= \varphi \\ d(\varepsilon_0) &= \varepsilon_1\alpha + \psi. \end{cases} \quad (41)$$

Ce système admet des solutions similaires que celui d'avant. En effet, si en prend la solution

$$(\varepsilon_1 = -\psi a + (-1)^n \varphi h, \quad \varepsilon_0 = (-1)^n \varepsilon_1 h \alpha - (-1)^n \varepsilon_1 \alpha g - (-1)^n \psi g)$$

on trouve

$$\begin{aligned}
 d(\varepsilon_1) &= d(-\psi a + (-1)^n \varphi h) \\
 &= -d(\psi)a - \varphi d(h) \\
 &= \varphi \alpha a - \varphi(\alpha a - 1) \\
 &= \varphi.
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 d(\varepsilon_0) &= d((-1)^n \varepsilon_1 h \alpha - (-1)^n \varepsilon_1 \alpha g - (-1)^n \psi g) \\
 &= (-1)^n d(\varepsilon_1 h \alpha) - (-1)^n d(\varepsilon_1 \alpha g) - (-1)^n d(\psi g) \\
 &= (-1)^n d(\varepsilon_1) h \alpha + \varepsilon_1 d(h) \alpha - (-1)^n d(\varepsilon_1) \alpha g - \varepsilon_1 \alpha d(g) - (-1)^n d(\psi) g - \psi d(g) \\
 &= (-1)^n \varphi h \alpha + \varepsilon_1 (\alpha a - 1) \alpha - (-1)^n \varphi \alpha g - \varepsilon_1 \alpha (a \alpha - 1) + (-1)^n \varphi \alpha g - \psi d(g) \\
 &= (-1)^n \varphi h \alpha + \varepsilon_1 \alpha a \alpha - \varepsilon_1 \alpha - (-1)^n \varphi \alpha g - \varepsilon_1 \alpha a \alpha - \varepsilon_1 \alpha + (-1)^n \varphi \alpha g - \psi d(g) \\
 &= -\psi d(g) + (-1)^n \varphi h \alpha \\
 &= \psi(1 - a \alpha) + (-1)^n \varphi h \alpha \\
 &= \psi - \psi a \alpha + (-1)^n \varphi h \alpha \\
 &= \psi + (-\psi a + (-1)^n \varphi h) \alpha \\
 &= \psi + \varepsilon_1 \alpha
 \end{aligned}$$

car $\varepsilon_1 = -\psi a + (-1)^n \varphi h$. On a terminé la preuve que le schéma simplicial X satisfait les conditions $G.P_{n,0}$ pour $n \geq 2$. La preuve que le schéma simplicial X satisfait les conditions $G.P_{n,n}$ se fait d'une manière similaire.

Maintenant on va traiter $G.P_{n,k}$ pour $0 < k < n$, sans utilisation de l'inverse .

Théorème 2.10 *Les deux schémas simpliciaux X et \overline{X} satisfont tous les deux aux conditions $G.P_{n,k}$ pour $0 < k < n$.*

De la même manière, on notera par $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}(0, 1, \dots, n)$ et $\hat{\alpha}_a = \hat{\alpha}(0, 1, \dots, \hat{a}, \dots, n)$ tel que \hat{a} signifie que le $a^{\text{ème}}$ élément est enlevé.

On va résoudre le système

$$\left\{ \begin{aligned}
 d(\hat{\alpha}_a) &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, [\hat{a}], \dots, n) \hat{\alpha}(0, \dots, [\hat{a}], \dots, j) \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{[j]} \hat{\alpha}(j, \dots, \hat{a}, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\
 &= U \\
 d(\hat{\alpha}_0) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(0, \dots, j) \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\
 &= (-1)^{\tau_a} \hat{\alpha}_a + \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(0, \dots, j) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=0, j \neq a}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n) \right) \\
 &= (-1)^{\tau_a} \hat{\alpha}_a + V
 \end{aligned} \right. \quad (42)$$

où τ_a est le degré de l'élément a qui vaut dans notre cas $a + 1$, la notation $[j]$ signifie que $[j] = j$ si $j < a$ et $[j] = j - 1$ si $j > a$ et $[\hat{a}]$ signifie que a est enlevé d'un côté ou l'autre.

Avec ces notations, on voit que

$$\begin{aligned} U &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, [\hat{a}], \dots, n) \hat{\alpha}(0, \dots, [\hat{a}], \dots, j) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{[j]} \hat{\alpha}(j, \dots, \hat{a}, \dots, \hat{j}, \dots, n) \\ V &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \hat{\alpha}(j, \dots, n) \hat{\alpha}(0, \dots, j) \\ &\quad + \sum_{j=0, j \neq a}^{n-1} (-1)^j \hat{\alpha}(0, \dots, \hat{j}, \dots, n). \end{aligned}$$

Avant de résoudre le système (42), on va d'abord démontrer le lemme suivant

Lemme 2.11 *la différentielle d vérifie :*

1. $d(U) = 0$.
2. $d((-1)^{\tau_a} \hat{\alpha}_a + V) = 0$, cela signifie que $(-1)^{\tau_a} U + d(V) = 0$.

Preuve :

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme (2.9)▲

On va résoudre maintenant le système

$$\begin{cases} d(\hat{\alpha}_a) &= U \\ d(\hat{\alpha}_0) &= (-1)^{\tau_a} \hat{\alpha}_a + V \end{cases} \quad (43)$$

ce système admet comme solutions évidentes $\hat{\alpha}_a = -(-1)^{\tau_a} V$ et $\hat{\alpha}_0 = 0$. ▲

Remarque 2.12 *Pour tout Foncteur R satisfait (REPR), nous avons que le schéma simplicial X satisfait au $G.P_{n,k}$, $\forall n \geq 2$ et $\forall 0 < k < n$.*

Maintenant si on note par $[\tilde{\alpha}_0]$ et $[\tilde{\alpha}_a]$ les solutions modulo I du système (43), on cherche des solutions $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_a$ sur B qui étendent $[\tilde{\alpha}_0]$ et $[\tilde{\alpha}_a]$.

Soient $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_a$ deux solutions quelconques sur B telles que

$$\begin{cases} [\tilde{\alpha}_0] &= \tilde{\alpha}_0 \text{ modulo } I \\ [\tilde{\alpha}_a] &= \tilde{\alpha}_a \text{ modulo } I \end{cases}$$

On garde les mêmes notations que dans le cas (3), soient φ et ψ les termes d'erreurs des équations du système

$$\begin{cases} d(\tilde{\alpha}_a) = U + \varphi \\ d(\tilde{\alpha}_0) = (-1)^a \tilde{\alpha}_a + V + \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = d(\tilde{\alpha}_a) - U \\ \psi = d(\tilde{\alpha}_0) - (-1)^a \tilde{\alpha}_a - V \end{cases} \quad (44)$$

On applique la différentielle d sur φ et ψ , on trouve

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= d^2(\tilde{\alpha}_a) - d(U) = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\psi) &= d^2(\tilde{\alpha}_0) - (-1)^a d(\tilde{\alpha}_a) - d(V) \\ &= -(-1)^{\tau_a} d(\tilde{\alpha}_a) - d(V) \\ &= -(-1)^{\tau_a} (U + \varphi) - d(V) \\ &= -(-1)^{\tau_a} \varphi \end{aligned}$$

On pose maintenant les deux solutions $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{\alpha}_a$ avec les deux perturbations ε_0 et $d(\varepsilon_a)$ tels que

$$\hat{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_0 - \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_a = \tilde{\alpha}_a - \varepsilon_a$$

On applique la différentielle d sur les deux termes pour calculer $d(\varepsilon_0)$ et ε_a on trouve :

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_0) &= d(\tilde{\alpha}_0) - d(\hat{\alpha}_0) \\ &= (-1)^a \tilde{\alpha}_a + V + \psi - (-1)^a \hat{\alpha}_a - V \\ &= \psi + (-1)^{\tau_a} \varepsilon_a \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_a) &= d(\tilde{\alpha}_a) - d(\hat{\alpha}_a) \\ &= U + \varphi - U \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système

$$\begin{cases} d(\varepsilon_0) = \psi + (-1)^{\tau_a} \varepsilon_a \\ d(\varepsilon_a) = \varphi. \end{cases}$$

qui admet une solution similaire à celle du système (43), donc on peut prendre $\varepsilon_a = -(-1)^{\tau_a} \psi$ et $\varepsilon_0 = 0$. Nous avons donc résolu le système d'équations (43), ce qui montre la lissité formelle du morphisme de Pridham •

Références

- [BENZ13] B. BENZEGHLI. Thèse en cours de rédaction.
- [BENZ12] B. BENZEGHLI. Géométricit  artinienn  de l' -champs des éléments de Maurer-Cartan. Preprint. <http://arxiv.org/abs/1210.0192v1>
- [BENZ08] B. BENZEGHLI. Les Complexes Parfaits. Mémoire de recherche Master2. 16 SEPT 2008.
- [BRUN] W. BRUNS. Divisors on varieties of complexes. Math. Ann. 264 (1983), 53-71.
- [BUCH1] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD. What makes a complex exact ? J. Algebra 25 (1973), 259-268.
- [BUCH2] D. BUCHSBAUM, D. EISENBUD. Some structure theorems for finite free resolutions. Adv. in Math. 12 (1974), 84-139.
- [CALA] J. CALAIS.  l ments de Théorie des Anneaux (Anneaux commutatifs). Ellipses, 2006.
- [DWYER1] W. G. DWYER and D. M. KAN. Calculating Simplicial Localizations. Journal of Pure and Applied Algebra. 18(1980) 17 – 35.
- [DWYER2] W. G. DWYER and D. M. KAN. Simplicial Localizations of Categories. Journal of Pure and Applied Algebra 17(1980) 267 – 284.
- [DWYER3] W. G. DWYER and D. M. KAN. Fonction Complexes for diagrams of Simplicial Sets. MATHEMATICS, proceeding A 86(2), June 20, 1983.
- [DWYER4] W. G. DWYER and D. M. KAN. An obstruction Theory for Diagrams of Simplicial Sets. MATHEMATICS, Proceedings A 87(2), June 18, 1984.
- [GROTH] A. Grothendieck, La Poursuite des Champs
- [GUGE] V.K.A.M. GUGENHEIM, L. LAMBE. Applications of perturbation theory to differential homological algebra I,II. Illinois J. Math. 33 (1989), 556-582 ; 35 (1991), 357-373.
- [HART] R. HARTSHORNE. Algebraic geometry. (Graduate Texts in Mathematics 52). Springer-Verlag, 6th edition 1993.
- [HIRS] A. HIRSCHOWITZ, C. SIMPSON. D scente pour les n -champs. Preprint arXiv :math/9807049.
- [HUNE] C. HUNEKE. The Arithmetic Perfection of Buchsbaum-Eisenbud Varieties and Generic Modules of Projective Dimension Two. Transactions of the American Mathematical Society, 265 (1981), 211-233.
- [KELL] B. KELLER. Intoduction to A -infinity algebras and modules. <http://arxiv.org/abs/math.RA/9910179> .
- [KEMP] G. KEMPF. Images of homogeneous vector bundles and varieties of complexes. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 900-901.
- [LANG] S. LANG. ALGEBRA. third edition. Addison-Wesley Publishing Company 1993.

- [MASS] C. MASSRI. Examples of varieties of structures. Preprint arXiv :1202.5530 (2012).
- [PERR] D. PERRIN. GEOMETRIE ALGEBRIQUE (Une introduction). SAVOIRS ACTUELS (CNRS Edition / InterEdition), 1998.
- [PRID] J. P. PRIDHAM. Presenting higher stacks as simplicial schemes. Preprint arxiv 0905.4044 (2009).
- [SIMP] C. SIMPSON. Homotopy theory of Higher Categories. From Segal Categories to n-Categories and Beyond. new mathematical monographs : 19. ISBN :9780521516952. Cambridge 2011.
- [SIMP1] C. SIMPSON. Algebraic (geometric) n -stacks. 1996. Preprint. <http://arxiv.org/abs/alg-geom/9609014>.
- [SIMP2] C. SIMPSON. Geometricity of the Hodge filtration on the ∞ -stack of perfect complexes over X_{DR} . Preprint. <http://arxiv.org/abs/math/0510269v2>
- [TABU] G. TABUADA. Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 15-19.
- [THOM] R. THOMASON, T. TROBAUGH. Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories. The Grothendieck Festschrift, Vol. III, 247–435, Progr. Math., 88, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.
- [TOEN1] B. TOEN. The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory. Invent. Math 167. 615-667 (2007).
- [TOEN2] B. TOEN, M. VAQUIE. Moduli of objects in dg-categories. Annales de l'E.N.S., 40 (2007), 387-444.
- [TRIV] V. TRIVEDI. The seminormality property of circular complexes. Proc. Indian Acad. Sci. 101 (1991), 227-230.
- [VALL] J-L LODAY, B. VALLETTE. Algebraic Operads. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Volume 346, Springer-Verlag (2012).
- [YOSH] Y. YOSHINO. Some results on the variety of complexes. Nagoya Math. J. 93 (1984), 39-60.

LABORATOIRE J.A. DIEUDONNÉ, UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS, PARC VAL-ROSE, 06108 NICE CEDEX 02, FRANCE, bbrahim@unice.fr